



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Факультет «Кораблестроение и морская техника»
Кафедра «Управление качеством»

ОСНОВЫ ПОЛУЧЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Задания и методические указания к контрольной работе

Ростов-на-Дону
2023

УДК 006.91

Составители: Кошлякова И.Г., Атоян Т.В.

Основы получения измерительной информации: метод. указания. – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2023. – 19 с.

Содержит комплекс практических заданий, направленных на получение навыков выбора средств измерений, статистической обработки результатов измерений физических величин с целью обеспечения качества и достоверности измерительной информации о параметрах продукции и процессов.

Предназначены для бакалавров направления подготовки 27.03.01.

УДК 006.91

Печатается по решению редакционно-издательского совета Донского государственного технического университета

Научный редактор докт. техн. наук, профессор М.С. Степанов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Управление качеством»
докт. техн. наук, профессор В.П. Димитров

В печать _____.____.2023 г.

Формат 60×84/16. Объем 1,2 усл. п. л.

Тираж 200 экз. Заказ №. ____.

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный технический университет, 2023

СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решение задач контрольной работы оформляется в отдельной тетради или в печатном виде на листах формата А4 с титульным листом типового образца.

Вариант выполнения задачи определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Описание решения задачи рекомендуется в следующей последовательности:

- условие задачи с исходными данными;
- подробное изложение алгоритма решения с цифровыми данными и графическими иллюстрациями;
- выводы.

Задача 1.

Установите категорию физической величины в международной системе SI, приведите определение величины, выразите размерность величины через размерности основных величин системы SI, перечислите системные и внесистемные единицы, применяемые для выражения результатов измерений заданной величины. Приведите соотношения внесистемных единиц измерений величин с системными. Расшифруйте все единицы измерений, входящие в определение единицы производной величины.

Таблица 1. Исходные данные.

Цифра номера зачетной книжки		Последняя цифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра	0	длина	влажность	эл.мощность	уровень звукового давления	ускорение линейное	количество теплоты	плоский угол	напряженность магнитного поля	Плотность	удельная энергия
	1	скорость линейная	масса	звуковое давление	количество информации	удельный объем	частота	механич. сопротивление	момент силы	молярная энтальпия	акустическое сопротивление
	2	энергетическая яркость	Энтропия	время	химический потенциал	теплопроводность	облученность	оптическая сила	мощность поглощенной дозы	энтропия системы	динамическая вязкость
	3	мех. энергия	магнитная проницаемость	световой поток	сила тока	эл. напряжение	поверхностное натяжение	магнитный поток	эл. сопротивление	намагниченность	индуктивность
	4	молярная масса	количество теплоты	удельная энергия	расстояние	термодинамическая температура	поток магнитной индукции	эл.смещение	интенсивность звука	давление	разность потенциалов
	5	эл.проводимость	яркость	сила	световой поток	эл.энергия	сила света	расход массовый	мех. мощность	удельная энергия	светимость
	6	поверхностное натяжение	удельная теплоемкость	напряженность эл. поля	магнитный момент	количество теплоты	кинематическая вязкость	объем	освещенность	теплоемкость	эл.заряд
	7	площадь	магнитная проницаемость	вес	сила излучения	динамическая вязкость	энергетическая яркость	поверхностное натяжение	давление	вместимость	активность радионуклида
	8	эл. емкость	телесный угол	плотность эл.тока	энергия	скорость угловая	энергия	диэл.проницаемость	ускорение угловое	сила	молярный объем
	9	эл. потенциал	поглощенная доза ионизирующего излучения	момент силы	Мощность	количество электричества	расход объемный	пространственная плотность эл.заряда	ЭДС	давление	работа

Задача 2.

Обоснуйте выбор, опишите метрологические характеристики и приемы применения средств измерений линейных размеров для заданных: номинального значения и допусков отверстия и вала, указанных в табл. 2.

Таблица 2. Исходные данные для измерений.

Цифра номера зачетной книжки	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Номинальный размер, мм	400	500	180	250	315	50	80	18	120	30
Номер качества отверстия	10	7	8	9	6	11	12	7	8	9
Номер качества вала	8	9	7	10	12	6	8	7	10	8

Выбор задания производится по двум последним цифрам номера зачетной книжки – по последней цифре – номинальный размер, номер качества *вала*; по предпоследней цифре – номер качества *отверстия*.

Задача 3.

Произведены прямые многократные измерения линейного размера. Результаты измерений представлены в виде отклонений от номинального значения. Экспериментальные значения распределены по интервалам, как приведено в табл. 3. Количество экспериментальных данных, попадающих в *i*-тый интервал, приведено в табл. 4.

Таблица 3. Распределение результатов измерений по интервалам значений

Но-- мер интер- вала	Последняя цифра номера зачетной книжки									
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	Интервалы отклонений от номинального значения, мкм									
1	-50; -40	0; 5	-2,5;-2	-100;-80	-500;-400	-10;-8	-5; -4	0; 2	-25; -20	0; 4
2	-40; -30	5; 10	-2;-1,5	-80; -60	-400;-300	-8; -6	-4; -3	2; 4	-20; -15	4; 8
3	-30; -20	10;15	-1,5;-1	-60; -40	-300;-200	-6; -4	-3; -2	4; 6	-15; -10	8; 12
4	-20; -10	15;20	-1;-0,5	-40; -20	-200;-100	-4; -2	-2; -1	6; 8	-10; -5	12;16
5	-10; 0	20;25	-0,5; 0	-20; 0	-100; 0	-2; 0	-1; 0	8; 10	-5; 0	16;20
6	0; 10	25;30	0; 0,5	0; 20	0; 100	0; 2	0; 1	10; 12	0; 5	20;24
7	10; 20	30;35	0,5; 1	20; 40	100;200	2; 4	1; 2	12; 14	5; 10	24;28
8	20; 30	35;40	1; 1,5	40; 60	200;300	4; 6	2; 3	14; 16	10; 15	28;32
9	30; 40	40;45	1,5; 2	60; 80	300;400	6; 8	3; 4	16; 18	15; 20	32;36
10	40; 50	45;50	2; 2,5	80; 100	400; 500	8; 10	4; 5	18; 20	20; 25	36;40
Довери- тельная ве- роятность Р	0,95	0,975	0,98	0,99	0,90	0,80	0,995	0,98	0,95	0,99

Таблица 4. Распределение абсолютных частот по интервалам

Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	Число экспериментальных данных, попадающих в i-тый интервал									
	Номер интервала									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	4	8	14	25	37	15	9	6	5	2
1	2	4	17	28	48	27	12	8	4	2
2	1	5	14	27	35	28	14	7	5	1
3	3	15	25	42	30	21	17	9	4	3
4	2	7	12	22	40	30	19	14	6	2
5	1	5	12	15	33	20	12	6	4	1
6	3	10	18	27	36	24	9	7	5	3
7	2	8	11	26	37	21	12	7	3	1
8	2	9	14	19	36	34	20	15	2	2
9	1	4	15	26	38	20	11	8	4	2

Требуется:

1. Построить гистограмму эмпирического распределения.
2. Проверить критерием Романовского наличие и исключить имеющиеся промахи.
3. Проверить гипотезу о соответствии эмпирического распределения нормальному закону Гаусса с помощью критерия Пирсона χ^2 .
4. Построить доверительный интервал для результата многократных измерений.

Задача 4.

Произведены многократные измерения двух параметров a_1 и a_2 . Известна функциональная зависимость $A = f(a_1^k; a_2^l)$ (табл. 5) для определения косвенно измеряемой величины. Значения параметров a_1 и a_2 приведены в таблице. 6.

Таблица 5. Функциональная зависимость для косвенных измерений

	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки									
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Измеряемая величина	Ускорение	Сила тока	Освещенность	Электрическое сопротивление	Сила тока	Электрическая мощность	Плотность	Электрическое сопротивление	Электрическая мощность	Напряжение эл. поля
Функциональная зависимость	$a = \frac{L}{t^2}$	$I = \frac{U}{R}$	$E = \frac{\Phi}{S}$	$R = \frac{P}{I^2}$	$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$	$P = \frac{U^2}{R}$	$\rho = \frac{m}{V}$	$R = \frac{U}{I}$	$P = I^2 \cdot R$	$U = \frac{P}{I}$
Доверительная вероятность Р	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,95	0,98

Таблица 6. Результаты многократных измерений аргументов

Последняя цифра номера хачетн.книжки	Параметры	Значения измеряемых параметров (размерности – в единицах системы SI)									
9	a_1	20,2	20,1	20,4	20,2	19,8	19,7	20,5	20,1	19,5	19,9
	a_2	7,6	7,5	7,7	7,9	6,9	7,1	7,2	6,8	6,5	7,3
8	a_1	3,2	3,3	2,9	2,8	3,1	3,0	2,7	2,5	2,2	3,8
	a_2	7,7	6,9	6,8	7,0	7,1	7,3	7,5	7,0	6,5	6,7
7	a_1	4,3	4,0	3,8	3,9	3,5	4,1	4,5	3,7	3,8	4,6
	a_2	2,4	2,1	1,9	2,2	2,5	1,7	1,9	1,5	2,8	2,5
6	a_1	10,4	10,1	9,9	9,7	10,3	10,0	9,5	9,8	10,4	10,5
	a_2	31,9	32,0	32,3	31,8	31,9	32,5	32,2	31,6	31,7	32,3
5	a_1	50,2	50,5	50,0	49,8	49,9	50,1	49,4	49,7	50,0	50,2
	a_2	25,5	26,0	25,9	25,8	25,4	26,2	26,7	26,5	26,1	26,4
4	a_1	12,2	11,8	12,1	12,4	11,9	12,5	11,3	13,0	12,9	12,3
	a_2	5,2	5,0	5,5	5,8	4,8	5,3	5,4	5,7	5,6	5,1
3	a_1	8,1	8,3	8,7	7,8	7,9	8,2	8,6	8,8	8,0	8,5
	a_2	15,5	15,2	15,8	15,1	15,3	15,5	15,7	15,5	15,4	14,8
2	a_1	3,8	3,3	3,5	2,9	2,8	3,6	3,4	2,9	3,0	3,2
	a_2	18,2	17,9	17,5	17,7	18,1	18,3	18,5	17,8	17,5	17,7
1	a_1	8,9	8,8	9,5	9,2	8,5	8,7	8,9	9,3	9,1	9,2
	a_2	16,2	16,5	16,0	16,4	15,7	15,9	15,8	16,0	16,3	15,5
0	a_1	28,9	29,0	29,2	28,7	28,6	29,1	29,4	29,2	28,7	28,9
	a_2	12,7	12,9	13,5	13,2	13,1	13,7	12,6	12,9	12,5	13,0

Примечание: в функциональных зависимостях параметр « a_1 » стоит на первом месте в произведении либо в числителе дроби.

Требуется. Найти измеряемую косвенно с помощью функциональной зависимости величину и представить результат измерений в форме доверительного интервала с заданной доверительной вероятностью P .

Задача 5.

При исследовании зависимости сопротивления R медной проволоки от температуры T получены экспериментальные значения в виде пары "температура-сопротивление" (табл. 6). Зависимость между R и T имеет вид $R = R_0(1 + \alpha T)$, где R_0 - сопротивление проводника при температуре 0°C ; α - температурный коэффициент сопротивления.

Требуется. Найти значения R_0 и α . Оценить точность полученных результатов.

Число уравнений n определяется числом пар исходных данных (табл. 7).

Таблица 7. Результаты совместных измерений.

Последняя цифра номера зачетной книжки													
	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	t, °C
													R, Ом
	36,2	35,8	35,2	34,8	34,5	33,8	33,4	32,7	32,2	31,7	31,2	30,61	
50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	t, °C
	59,1	58,0	56,8	56,2	55,3	55,0	53,0	52,4	52,0	50,5	50,0	48,6	R, Ом
		30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	1	t, °C
		118,6	116,7	114,9	113,1	111,2	109,3	107,5	105,6	103,5	101,9	100,6	R, Ом
	95	90	85	80	75	65	55	50	40	30	20	10	t, °C
	174,7	172,0	169,0	166,1	163,2	157,5	151,2	148,8	143,1	137,3	131,5	125,8	R, Ом
70	65	60	56	50	45	35	28	22	18	14	10	6	t, °C
	75,2	74,1	73,1	71,7	70,5	68,2	66,6	65,2	64,2	63,3	62,4	61,4	R, Ом
76,4	50	46	40	32	30	25	20	16	12	10	5	1	t, °C
	260,0	253,4	246,5	237,0	234,8	229,0	223,2	218,6	213,9	211,6	205,8	201,2	R, Ом
100	90	80	70	60	50	45	40	36	30	24	16	8	t, °C
	15,5	14,8	14,0	13,8	13,0	12,8	12,4	12,2	11,8	11,5	11,0	10,5	R, Ом
	55	53	50	46	42	34	30	24	19	14	9	4	t, °C
	104,0	103,0	102,0	106,6	99,3	96,6	95,2	93,0	91,5	89,8	88,1	86,4	R, Ом
100	95	90	85	80	70	60	50	40	30	25	20	15	t, °C
	99,0	97,4	96,0	94,4	91,3	88,3	85,3	82,2	79,0	77,6	76,1	74,6	R, Ом
70	65	60	55	52	48	44	40	35	30	27	24	20	t, °C
30,7	34,4	30,0	29,5	29,3	28,9	28,6	28,3	27,9	27,5	27,3	27,0	26,7	R, Ом

Методические указания к решению задач.

Задача 1.

При выражении результатов измерений обязательным требованием обеспечения единства измерений является применение законодательно утвержденных единиц измерений. Таковыми являются единицы системы SI. Формальным отражением качественного различия измеряемых величин является их размерность. Размерность обозначается "dim" и записывается заглавными латинскими буквами. Для основных величин SI это:

- размерность длины – $\dim l = L$;
- размерность массы – $\dim m = M$;
- размерность времени – $\dim t = T$;
- размерность силы электрического тока – $\dim I = I$;
- размерность термодинамической температуры – $\dim T = \Theta$;
- размерность силы света – $\dim j = J$.

Размерность любой производной физической величины Q можно представить уравнением, содержащим размерности основных физических величин с соответствующими показателями степеней:

$$\dim Q = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot I^{\lambda} \cdot \Theta^{\eta} \cdot J^{\zeta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi$ – показатели степеней.

Зная размерность величины, можно проверить правильность вывода зависимостей между физическими величинами, а на начальных этапах предположить, с какими величинами может быть связана исследуемая физическая величина.

Порядок решения задачи.

Выразить размерность измеряемой величины через размерности основных физических величин SI. Для этого:

1.1. Дать определение физической величины.

1.2. Раскрыть математической формулой ее взаимосвязь с основными величинами.

1.3. Записать ее размерность в форме степенного одночлена, содержащего размерности основных величин SI.

Например, чтобы выразить размерность ускорения, необходимо представить его зависимость от основных величин SI – пути и времени:

$$a = v/t = l/t^2,$$

где v – скорость; l – путь (длина); t – время.

Тогда можно записать размерность ускорения:

$$\dim a = \dim^1 l \cdot \dim^{-2} t = L^1 \cdot T^{-2}.$$

1.4. Перечислить системные и внесистемные единицы, применяемые для выражения результатов измерений заданной величины /1/.

1.5. Расшифровать все единицы измерений, входящие в определение единицы производной величины, чтобы показать связь данной величины с другими величинами.

Задача 2.

Качество измерений зависит от правильного выбора средств измерений (СИ). При этом учитывают измеряемую величину, метод, условия проведения и допускаемую погрешность измерений, диапазон измерений, характеристики погрешностей, стоимость СИ, простоту их эксплуатации, причём первоочередное внимание уделяется точности СИ, как фактору, наиболее существенно влияющему на результат измерения.

При выборе СИ по точности необходимо учитывать долю допустимой погрешности измерений, приходящуюся на погрешность используемых СИ, которая не может превышать 65% от предельно допустимой погрешности измерения δ .

Выбор средств измерений (СИ) линейных размеров по точностным параметрам для осуществления приёмочного контроля может быть выполнен по ГОСТ 8.051-81 «Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм» и в соответствии с методическими указаниями РД 50-98-86 «Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм». Использование методических указаний избавляет от необходимости рассчитывать самостоятельно суммарную погрешность по выявленным её составляющим для случаев измерения универсальными СИ наружных и внутренних линейных размеров деталей, глубин, биений.

Общую классификацию измерений можно представить следующей схемой (рис. 1)



Рисунок 1. Классификация измерений.

Порядок решения задачи.

- 2.1 В соответствии с двумя последними цифрами номера зачетной книжки выписать исходные данные задачи.
- 2.2. Определить значения допуска IT и предельно допустимой погрешности измерения δ /2/, /3/.
- 2.3. Оценить предельно допустимую погрешность СИ заданного размера детали $\Delta_{СИ} = 0,65 \cdot \delta$.
- 2.4. Выбрать СИ для заданного параметра детали с учетом его контролепригодности.
- 2.5. Привести список метрологических характеристик и описание устройства и порядка применения выбранного СИ.
- 2.6. Определить в соответствии с классификацией (рис.1) вид измерений, выполняемых выбранным СИ.

Задача 3.

Порядок решения задачи.

3.1. Проверить крайние (наибольший и наименьший) результаты измерений на наличие грубых погрешностей (промахов) с помощью критерия Романовского. Для этого:

3.1.1. Рассчитать среднее арифметическое значение (\bar{X}) результатов измерений (см. табл. 3 и 4):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_{0i}}{n},$$

где $x_{0i} = \frac{x_{Вi} + x_{Нi}}{2}$;

$x_{Вi}$ и $x_{Нi}$ – верхняя и нижняя границы каждого интервала, соответственно.

3.1.2. Рассчитать среднее квадратичное отклонение (СКО):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{0i} - \bar{X})^2 m_i}{n - 1}}$$

3.1.3. Для проверяемого результата измерений x_i вычисляется:

$$t_i = \frac{|x_i - \bar{X}|}{S}.$$

Значение t_i сравнивается с табличным t_T . Если $t_i \geq t_T$, то x_i считается промахом. При большом числе экспериментальных данных $n > 50$ критическое значение t_T можно определить по формуле:

$$t_T = t_{\frac{P}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n}},$$

где $t_{\frac{P}{2}}$ – квантиль функции Лапласа для значения функции $\frac{P}{2}$

(Приложение А);

P – доверительная вероятность.

3.1.4. Промахами считаются результаты, для которых выполняется данное неравенство. Такие значения должны быть исключены. После исключения промаха необходимо пересчитать среднее арифметическое и СКО, а затем проверить крайнее значение с другого конца ранжированного ряда результатов измерений. Проверка должна проводиться пошагово до тех пор, с обоих концов ранжированного ряда результатов измерений не останется промахов.

3.2. Построить гистограмму эмпирического распределения без учета исключенных результатов измерений, являвшихся промахами.

3.2.1. Для каждого интервала определить эмпирическую (статистическую) вероятность попадания случайной измеряемой величины в i-й интервал (частость):

$$P_i = \frac{m_i}{n}$$

где m_i – число значений, попавших в i-й интервал (см. табл. 4);

n – общее число экспериментальных данных:

$$n = \sum_{i=1}^r m_i, \text{ где } r - \text{число интервалов.}$$

3.2.2. Построить гистограмму (рис. 2), которая представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников. Основанием каждого прямоугольника являются отрезки, отображающие ширину интервала h вариационного ряда (см. табл. 3), а высоты равны значениям эмпирических частостей P_i .

3.3. Проверить гипотезу о соответствии эмпирического распределения нормальному закону Гаусса. Для этого необходимо:

3.3.1. Определить теоретическую вероятность попадания значений измеряемой величины в i-й интервал в соответствии с законом нормального распределения:

$$P_{Ti} = \Phi((x_{vi} - \bar{X})/S) - \Phi((x_{ni} - \bar{X})/S),$$

где $\Phi (***)$ – значение функции Лапласа по приложению А.

При этом следует учесть, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

3.3.2. Нанести полученные значения теоретической вероятности на график (см. рис. 2) и построить кривую теоретического распределения вероятности по нормальному закону.

3.3.3. Рассчитать для каждого интервала значение χ^2_i :

$$\chi_i^2 = \frac{(m_i - n \cdot P_{Ti})^2}{n \cdot P_{Ti}}.$$

3.3.4. Результаты расчетов представить в таблице по установленной форме (Приложение В).

3.3.5. Рассчитать эмпирическое значение χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \chi_i^2.$$

3.3.6. Полученное значение сравнить с табличным χ_{τ}^2 . По приложению Б для уровня значимости $q = 1 - P$ и числа степеней свободы $f = r - 3$.

3.3.7. Сделать вывод о соответствии эмпирического распределения результатов измерений теоретическому нормальному закону по правилу:

- гипотеза о соответствии нормальному распределению принимается, если выполняется условие $\chi^2 < \chi_{\tau}^2$;
- при невыполнении указанного неравенства гипотеза отклоняется.

3.4. Определить доверительный интервал для результата многократных измерений:

$$\bar{X} - t_p S_{\bar{X}} \leq X \leq \bar{X} + t_p S_{\bar{X}}$$

где t_p - коэффициент распределения Стьюдента при заданной доверительной вероятности P и числе степеней свободы $k = n - 1$ (Приложение Г);

$S_{\bar{X}}$ - среднее квадратичное отклонение среднего значения: $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

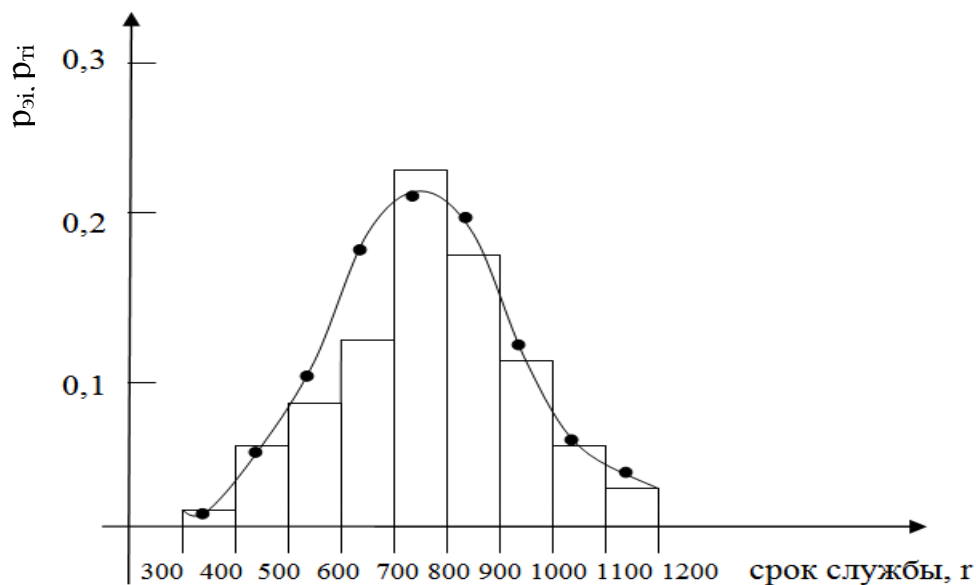


Рисунок 2. Пример построения гистограммы и кривой теоретического распределения.

Задача 4.

Взаимосвязи между измеряемыми параметрами нелинейные, поэтому их функциональные зависимости линеаризуют разложением в ряд Тейлора, на основании которого вычисляют результат измерений.

Порядок решения задачи.

4.1. Рассчитать оценочное среднее арифметическое значение измеряемой величины \tilde{A} с учетом функциональной зависимости: $A = f(a_1^k; a_2^l)$, где a_1 и a_2 – средние арифметические значения измеряемых

аргументов, вычисляемые по формуле: $\overline{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ji}}{n}$,

где x_{ji} – измеряемое значение j -го аргумента; n – число измерений; индексы k и l – показатели степени аргументов.

4.2. Рассчитать СКО среднего арифметического каждого аргумента:

$$s(\overline{X}_j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{ji} - \overline{X}_j)^2}{n(n-1)}}$$

4.3. Рассчитать СКО среднего арифметического измеряемой величины: $s(\tilde{A}) = \sqrt{\sum_{i=j}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_j} \right)^2 s^2(\overline{a}_j)}$

где $\frac{\partial f}{\partial a_j}$ – первая производная функции измеряемой величин по a_j -му аргументу; $m=2$ – число измеряемых аргументов.

4.4. Вычислить остаточный член ряда Тейлора: $R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial a_j^2} (\Delta a_j)^2$, где

$\frac{\partial^2 f}{\partial a_j^2}$ – полный дифференциал второго порядка в частных производных функции f ; Δa_j – наибольшее отклонение измеренных значений a_j -го аргумента от его среднего арифметического значения: $\Delta a_j = |a_{ji} - \overline{a}_j| \max$.

4.5. Установить влияние остаточного члена R на результат измерений по условию: если $R \geq 0,8 \cdot S(\tilde{A})$, то на его значение увеличивают значение \tilde{A} , в противном случае R не учитывается,

4.6. Представить результат измерений A в форме доверительного интервала:

$$\tilde{A} - t_p \cdot S(\tilde{A}) < A < \tilde{A} + t_p \cdot S(\tilde{A}),$$

где t_p – табличное значение критерия Стьюдента при заданной доверительной вероятности P (Приложение Г).

Задача 5.

5.1. Для удобства преобразуем зависимость между R и T к виду:

$$R_0 + \alpha R_0 T - R = 0$$

и введем обозначения: $a_j = 1$; $x = R_0$, $y = \alpha R_0$; $b_j = T$; $L_j = R$.

5.2. На основе исходных данных необходимо составить систему условных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y - L_1 + v_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y - L_2 + v_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny - L_n + v_n &= 0, \end{aligned}$$

где v_j , - невязки уравнения.

Число уравнений n определяется числом пар исходных данных (табл. 7).

5.3. Для нахождения двух неизвестных составить систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y &= [aL] \\ [ab]x + [bb]y &= [bL], \end{aligned}$$

$$\text{где } [aa] = \sum_{j=1}^n a_j a_j; [ab] = \sum_{j=1}^n a_j b_j; [aL] = \sum_{j=1}^n a_j L_j; [bb] = \sum_{j=1}^n b_j b_j; [bL] = \sum_{j=1}^n b_j L_j / 4.$$

5.4. Найти оценки неизвестных параметров \tilde{x} и \tilde{y} :

$$\tilde{x} = \frac{D_a}{D}; \tilde{y} = \frac{D_b}{D},$$

где D – главный определитель системы; D_a, D_b - алгебраические дополнения.

5.5. Подставить полученные значения оценок неизвестных параметров в условные уравнения системы и найти значения невязок данной системы уравнений:

$$v_j = a_j \tilde{x} + b_j \tilde{y} - L_j.$$

5.6. Найти среднее квадратическое невязок:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n v_j^2}{n - m}},$$

где n – число условных уравнений системы; m – число искомых величин.

5.7. Рассчитать СКО вычисленных значений искомых величин \tilde{x} и \tilde{y} :

$$s(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} S, \quad s(\tilde{y}) = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} S$$

где D_{11}, D_{22} – алгебраические дополнения элементов $[aa], [bb]$:

$$D_{11} = [bb]; \quad D_{22} = [aa].$$

5.8. Результаты представить в виде доверительных интервалов для $R_0=x$ и $\alpha=y/x$. Доверительные границы для R_0 определяются доверительными границами искомой величины x :

$$\varepsilon_{R_0} = \varepsilon_x = t_p S(\tilde{x})$$

где t_p - коэффициент Стьюдента.

Доверительные границы для α определяются по формуле:

$$\varepsilon_\alpha = \tilde{\alpha} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x}{\tilde{x}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\tilde{y}}\right)^2}$$

где $\varepsilon_y = t_p S(\tilde{y})$.

Доверительные интервалы имеют вид:

$$\tilde{R}_0 - \varepsilon_{R_0} \leq R_0 \leq \tilde{R}_0 + \varepsilon_{R_0}$$

$$\tilde{\alpha} - \varepsilon_\alpha \leq \alpha \leq \tilde{\alpha} + \varepsilon$$

где $\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}, \tilde{\alpha} = \tilde{x}$.

Рекомендуемая литература

1. ГОСТ 8.417-2002 Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин.
2. ГОСТ 8.051-81 «Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм».
3. РД 50-98-86. Методические указания «Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм» (по применению ГОСТ 8.051-81).
4. Кошлякова И.Г., Ваганов В.А., Атоян Т.В. Практикум по метрологии и стандартизации. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013. – 214 с.
5. Сергеев А.Г. Метрология: Учебник. – М., 2005. – 272 с.
6. Маркин И.С. Основы теории обработки результатов измерений. - М.: Изд-во стандартов, 1991. – 268 с.
7. Маркин Н.С. Практикум по метрологии. - М.: Изд-во стандартов, 1994. – 214с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица 1 – Значения функции $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986									
3,5	0,4998									
4,0	0,4999									

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Процентные точки χ^2 -распределения

$\nu \backslash P$	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,00393	0,01579	0,1015	0,4549	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,1026	0,2107	0,5754	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,21	10,6
3	0,3518	0,5844	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,7107	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	1,145	1,61	2,675	4,351	6,626	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,635	2,024	3,455	5,348	7,841	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,733	3,49	5,071	7,344	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	3,325	4,168	5,899	8,343	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,94	4,865	6,737	9,342	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	4,575	5,578	7,584	10,34	13,7	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	5,226	6,304	8,438	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,3
13	5,892	7,041	9,299	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	6,571	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	7,261	8,547	11,04	14,34	18,25	22,31	25	27,49	30,58	32,8
16	7,962	9,312	11,91	15,34	19,37	23,54	26,3	28,85	32	34,27
17	8,672	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	9,39	10,86	13,68	17,34	21,6	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,2	30,14	32,85	36,19	38,58
20	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Расчетные данные для проверки гипотезы о нормальности распределения

Номер интервала i	Границы интервала		Абсолютная частота m_i	Относительная частота P_i	Квантиль для границы		Функция Лапласа для границы		Теоретическая вероятность P_{Ti}	χ^2_i
	нижняя x_{ni}	верхняя x_{vi}			нижней $t_{ni} = \frac{(x_{ni} - \bar{X})}{S}$	верхней $t_{vi} = \frac{(x_{vi} - \bar{X})}{S}$	нижней $\Phi\left(\frac{x_{ni} - \bar{X}}{S}\right)$	верхней $\Phi\left(\frac{x_{vi} - \bar{X}}{S}\right)$		
1										
...										
...										
r										
Сумма	—	—			—	—	—	—		

**Значение процентных пределов t в зависимости от k степеней свободы и от вероятности
для распределения Стьюдента**

$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,999
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,36	212,2	318,3	636,6
2	2,29	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,6
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,61
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,8	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,86	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,25	3,69	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,56	2,681	3,055	3,428	3,706	3,93	4,318
14	1,761	2,145	2,51	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,14
16	1,746	2,12	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,61	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,25	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,36	2,457	2,75	3,03	3,23	3,386	3,646
∞	1,645	1,96	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,09	3,291